A KURT GÖDEL, IN MEMORIAM *

per

FRANCESC D'A. SALES - NADAL BATLE
VENTURA VERDÚ - JOSEP PLA I CARRERA

1. Presentació

Fa pocs dies hem rebut la notícia de la mort de Gödel. Aquest nom, Gödel, va lligat a un dels descobriments més importants en l'estudi del pensament pur. És també un nom que ha transcendit el camp dels especialistes en la matèria que tracten els resultats obtinguts. Això passa també amb Einstein, del qual tothom ha sentit parlar, però molt poca gent sap, amb certa precisió, què descobrí.

En el cas de Gödel la situació no és tan espectacular, però un xic, sí. Es parla força del teorema de Gödel, però ben poca gent sap realment què diu aquest teorema. És curiós i podria constituir objecte d'estudi per què un científic com Hilbert és un desconegut fora del camp d'especialistes en matemàtica i lògica i, en canvi, Gödel és molt més conegut.

Els resultats obtinguts per Gödel pertanyen al camp de la lógica i la matemàtica; però ja des d'un principi —i el principi en matemàtiques són els grecs— la matemàtica i la lògica han estat estretament emparentades.

Els grecs descobreixen o creuen descobrir que, suposant certes unes poques proposicions, hom pot deduir per pur raonament *totes* les propietats de les figures geomètriques. (L'axiomatització de l'aritmètica és molt posterior). Per tant els grecs desenvolupen la seva matemàtica per procediments lògics.

Al final del segle passat es produeix un interès molt acusat per la «fonamentació de la matemàtica». Aquest interès, produït pel descobriment de les geometries no euclidianes, és impulsat per la necessitat de trobar una base rigurosa de l'anàlisi matemàtica que, per l'obra de Cauchy i Weierstrass, queda palès que cal cercar-la en la fonamentació de l'aritmètica.

* Els articles que segueixen són les conferències que constituïren la sessió d'homenatge dedicat a K. Gödel, mort el 14 de gener de 1978, pel Departament d'Estadística Matemàtica de la Universitat de Barcelona el 8 de maig de 1978 a l'Aula Magna de la Universitat de Barcelona.

En aquesta línia de recerca són importants les aportacions de Frege, Russell, Peano, Hilbert, etc., que porten a la creació d'una disciplina, que podem considerar novella, l'«axiomàtica», que és l'estudi de les condicions òptimes que ha de tenir un sistema d'axiomes per tal de fonamentar una teoria.

Bertrand Russell arriba a dir que la matemàtica és una prolongació de la lògica, i en el moment històric que ho diu probablement té raó.

Però la història de la matemàtica presenta diversos moments que, quan sembla ja ben trobada una base, nous descobriments invaliden l'excessiva pretensió. El primer exemple que es coneix d'aquest fenomen és el famós teorema de Pitàgores, que porta, com a conseqüència, l'existència d'allò que avui anomenem «nombres irracionals» i que, per als grecs, no eren pas nombres.

Sembla que part de la filosofia de Kant assegurava que la geometria euclidiana era l'única possible, en els mateixos moments que hom començava a estudiar d'una manera quasi clandestina les geometries no euclidianes.

Com veureu més endavant (cf. 3), Gödel estudià la *completesa* dels sistemes d'axiones. Allà us precisaran què vol dir això. Jo ara solament vull indicar el resultat següent: tota teoria que inclogui la dels nombres naturals no pot tenir pas un sistema d'axiomes complet, que pretengui deduir que qualsevol proposició de la teoria és certa o és falsa.

Ara vull destacar un altre fenomen de la història de la matemàtica. En intentar de resoldre un problema, hom ha construït teories que han resultat molt interessants i que han permès d'estendre enormement, a voltes, el camp de la matemàtica.

En són exemples els tres problemes grecs ja cèlebres: la quadratura del cercle, la trisecció de l'angle i la duplicació del cub. N'és també un exemple l'últim teorema de Fermat, l'intent de demostració del qual serví indirectament per a crear la teoria dels ideals. Aquestes teories, però, no han resolt pas el problema plantejat.

Pel que fa a la relació entre la lògica i la matemàtica, el «problema de la fonamentació lògica de la matemàtica» sembla que és un d'aquests problemes. No s'ha resolt, i possiblement no té solució, però ha creat una sèrie d'estudis nous que es poden anomenar «matemàtica de la metamatemàtica» (Rasiowa-Sikorski) o «lògica-algèbrica» (Halmos); com a precursor d'aquest tipus d'estudis cal citar Boole, i en aquest esquema, crec jo, cal enquadrar l'obra de Gödel.

Ens podem preguntar: quina és la classe de proposicions de les quals no podem decidir si són certes o no? N'hi ha?

De temps ençà hom coneix una proposició que sembla d'aquest tipus; és la següent: «el nombre de morts a la batalla de Salamina fou parell». (La batalla ha d'ésser la de Salamina. No sé el perquè, però ha d'ésser aquesta). L'anterior proposició ha d'ésser certa o falsa, però evidentment no és possible de demostrar ni l'una cosa ni l'altra. Ara bé, no ho podem saber pel nostre desconeixement històric però no pas per dificultats de caràcter purament d'estructura lògica; per tant no és pas de les que podríem anomenar *gödelianes*.

En la teoria de les sèries, en estudiar la sèrie harmònica apareix un nombre C, anomenat constant d'Euler o de Mascheroni. Tot nombre real és *algèbric* —solució d'una equació algèbrica— o *transcendent* —no algèbric. Ara bé, hom no ha pogut pas demostrar ni que C és algèbric ni tampoc que no ho és. La proposició «C és algèbric» pot ésser doncs una proposició gödeliana però no ho sabem, ja que pot ocòrrer que demà passat es demostri que és algèbric o que no ho és. Només podríem assegurar que «C és algèbric» és una proposició gödeliana si arribàvem a provar que no podem demostrar-ne ni la certesa ni la falsedat.

Hi ha molts infinits. L'infinit més simple és el que hom anomena «numerable», que és el que correspon al conjunt dels nombres naturals. El conjunt dels nombres reals —punts d'una recta— és un infinit més gran que el numerable, i hom diu que el seu infinit és el «continu». El conjunt dels nombres racionals és també numerable.

Hom anomena «hipòtesi del continu» la proposició següent: «entre el numerable i el continu no hi ha cap infinit». Hom ha vist que aquesta proposició és «gödeliana», ja que el mateix Gödel ha demostrat que és compatible amb els axiomes preestablerts de la teoria dels conjunts i més tard Cohen ha demostrat que la seva negació també és compatible amb els dits axiomes, però que ni la proposició ni la seva negació no poden ésser establertes a partir dels dits axiomes.

[FRANCESC D'A. SALES]

2. APORTACIONS DE GÖDEL A LA TEORIA DELS CONJUNTS

La consistència de la hipòtesi del continu és cronològicament el tercer gran resultat de Gödel. Es refereix a una problemàtica important en la història de les matemàtiques: per això en donarem una visió retrospectiva. I començarem per la prehistòria.

PREHISTÒRIA

És prou coneguda la història d'allò que hom anomena la formalització —o també l'aritmetització— de l'anàlisi. No es tracta doncs de repetir les anècdotes que per ella s'han produït, però sí de centrar històricament el problema. Sabeu, sabem tots, que el càlcul infinitesimal comença, més o menys, al segle XVII i aquest començament es produeix justament quan la ciència experimental agafa embranzida i inicia un pas qualitatiu important: *hom comença a demanar-se «com funcionen» les coses en comptes de demanar-se «què són les coses» o «quina essència» tenen aquestes coses.* Així Galileu es demana «com descriure» el moviment i no pas «què és» el moviment o «quina causa última té».

Cal esmentar que aquest tipus de preguntes, o almenys l'interès que desperten, no tenen mai l'origen en el caprici personal d'una determinada persona, ans al contrari, tenen arrels més pregones. Cal tenir ben present que el mateix Galileu s'havia preocupat del problema de la balística. Durant el Renaixement les guerres necessiten tècniques per a fer anar els canons i les armes de foc de recent invenció. *Seguint amb l'exemple del moviment,* que crec que és important puix que és un paradigma del paper de la matemàtica, cal observar que quan Galileu fa la seva teoria de la caiguda dels cossos *no complica pas el problema en establir lleis matemàtiques,* ans el simplifica, puix que menysprea variables importants com és ara el fregament i altres tipus de forces i condicionants.

Fixem-nos bé: *Galileu no estudia la caiguda dels cossos reals, sinó que estudia la caiguda dels seus cossos imaginaris*; és a dir: aquells que segueixen una llei proporcional al quadrat del temps, que no són pas exactament els cossos reals.

La part física més important és que, sota unes certes hipòtesis, això retrata més o menys les experiències que amb els mitjans d'observació que hom tenia aleshores podien ésser dutes a terme. Altrament dit: Galileu, en aclarir el problema, el trivialitza. Tot aclariment és una trivialització, car una teoria no canvia i, per contra, la realitat canvia segons que l'observem d'una manera o d'una altra. El moviment en la caiguda dels greus de Galileu és molt simple i no necessita cap tipus de «model matemàtic» sofisticat. La llei $e = a.t^2$ no representa ni involucra cap tipus de problema complicat i era ben a l'abast de les tècniques «algèbriques» de l'època. Però les necessitats, cada cop més complicades, d'una societat que va cap a la industrialització, exigeixen més coneixement del moviment. Així el problema de la navegació necessita una coneixença força complicada de l'Astronomia, dels moviments dels planetes i de la lluna. Recordem que és l'època de les colonitzacions i dels descobriments geogràfics.

Això porta a l'estudi de les lleis de la gravitació que obliguen Newton a fixar-se en els problemes de càlcul infinitesimal. Com surten, doncs, els problemes de les derivades i de les integrals?

El model que proposa Newton de la mecànica és molt més sofisticat que no pas el de Galileu, per tal que ja admet qualsevol tipus de moviment, uniformement accelerat o no. La sofisticació del problema físic l'obliga a fer un model que empri eines matemàtiques sofisticades. Però hi ha una diferència respecte a Galileu. Newton —i uso el seu nom per a designar el col·lectiu format per tots aquells que es preocuparen d'aquest tipus de problemes— no descriu pas totalment ni amb precisió el model matemàtic que ha d'usar, sinó, que parla de «fluxions», de «primitives», etc., conceptes que, en un primer estadi epistemològic, són acceptables, però que involucren grans problemes (no ens proposem de discutir-los ara i ací). És per això que cal crear a la llarga durada un model de les idees matemàtiques de Newton que en certa manera les triavialitzi i que es convertirà en l'aritmetització de l'anàlisi.

La situació és doncs la següent: «Cal crear un model per a aclarir unes idees matemàtiques que d'entrada semblen clares i que a la llarga són vagues i que, en última instància, tenen un pèl de subjectives».

Insistint: «El model que hom farà serà un model d'una teoria matemàtica (notem que l'ús del terme model és ambigu) i no pas d'una teoria física. Probablement la idea de fluxió no era cap cosa concreta; és a dir: podia tenir moltes interpretacions semàntiques, les unes més satisfactòries que les altres.» Dir això no és massa tendenciós, puix que moltes idees infinitesimals no tindran una modelització satisfactòria fins a la creació de l'anàlisi no-estàndard per A. Robinson (vers els anys cinquantes).

HISTÒRIA

El procés d'industrialització iniciat en l'època que hem descrit es reforça durant els segles XVIII i XIX i les formes i mètodes de producció progressen o evolucionen. Mentre que les necessitats dels colonitzadors eren essencialment de tipus «navegacional» —i que em sigui perdonat el neologisme—, les necessitats d'aquesta època són de tipus «industrial». Per bé que hom podria citar molts exemples d'aquestes necessitats, només pararé esment en un cas que, crec jo, és central i alhora típic.

L'any 1822 —un any abans que Cauchy comencés a modelitzar matemàticament d'una manera precisa les idees del càlcul infinitesimal— apareix l'obra de Fourier «La théorie analytique de la chaleur». En aquesta memòria Fourier estableix hipòtesis de tipus físic per a modelitzar la conducció de la calor. Aquestes hipòtesis el porten a haver de considerar idees i conceptes matemàtics que no eren prou modelitzats en aquell moment històric. Fourier havia de trobar solucions a una certa equació en derivades parcials: l'equació de la calor. Per a trobar aquestes solucions pren en consideració el desenvolupament en sèrie de sinus i cosinus d'una funció arbitrària. Això comportava els problemes següents: 1) El concepte de funció; 2) Què volia dir desenvolupar; 3) Els problemes de la mesura i de la integració.

1. Quant a aquest problema, recordem que fins a l'època d'Euler una funció era una expressió «analítica» on figurava la variable (o variables) independent. Aquest concepte es revela insuficient en aquest context i comença a usar-se el concepte de funció en tant que aplicació.

2. Com és ben sabut, si f és una funció periòdica de període 2π definida en $[0,2\pi]$ es defineixen formalment els coeficients de Fourier (a_n,b_n) i la sèrie funcional

$$a_0/2+\sum(a_n.\cos nx+b_n.\sin nx)$$

s'anomena la sèrie de Fourier de f. El problema 2 consisteix a saber en quin sentit f és igual a la suma de la seva sèrie de Fourier. Com és ben sabut el problema de la convergència en mitjana quadràtica —o, dit d'unt manera actual, la convergència en L^2— és fàcil d'aclarir, però el de la convergència puntual no està totalment resolt encara avui en dia.

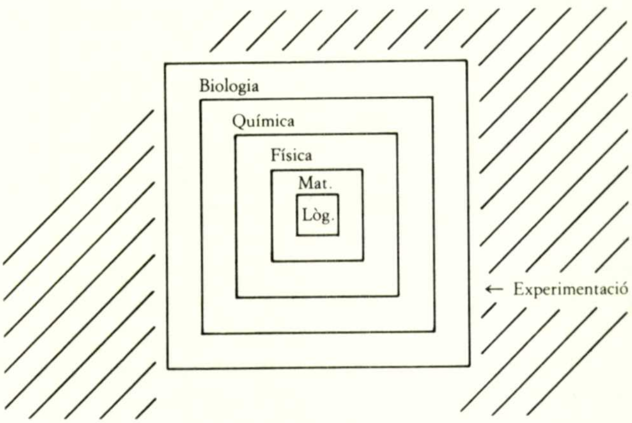
El problema 3 és relacionat amb l'1 i el 2 mitjançant la integral, i té a veure amb els mètodes que hom utilitza. Com veiem, aquests problemes tenen una relació íntima amb els problemes de conjunts en tant que la mateixa definició de funció és ja un problema conjuntista, i el de la integral implica la consideració de col·leccions de conjunts que satisfan certes propietats.

Doncs bé, aquests tipus de problemes que tenen relació amb els conjunts són els que fan néixer la teoria dels conjunts. G. Cantor era especialista en anàlisi matemàtic, i en el segle passat es preocupà de dos problemes molt relacionats: 1) el problema de les sèries de Fourier; 2 el problema de la mesura. Això el portà a estudiar els conjunts; ell volia mesurar la grandària de la col·lecció de punts on no es satisfà la convergència de la sèrie de Fourier d'una funció, i també volia saber a quins conjunts hom podia aplicar el concepte de mesura. Seguint l'exposició cronològica i comparant-ho amb allò que hem dit de Galileu i Newton, trobem un procés semblant però amb un tret qualitatiu important i diferent.

Quan Cantor es troba amb aquest tipus de problemes necessita un tipus de conceptes nous que li permetin de tractar els problemes inicials i, per consegüent, ha de crear un model d'aquestes idees que, potser, no retrataran completament tota la càrrega semàntica que hi ha darrera les idees preconjuntistes de Cantor. En la seva primera modelització, Cantor només es fixa en dos tipus de característiques o relacions que tenen els conjunts:

1. *el principi de comprensió:* tota propietat defineix un conjunt;
2. *el principi d'extensionalitat:* dos conjunts són iguals si tenen els mateixos elements.

Ací les mateixes matemàtiques han creat la necessitat de la modelització d'una nova teoria; però ací conflueix una situació nova que enfosqueix el problema. Els conjunts, i la naixent teoria delc conjunts, són tan a prop de les bases mateixes del raonament matemàtic —pensem en els dos principis que hem donat— que hom arriba a creure que existeixen els conjunts com a entitats pròpies, immòbils i independents de tota activitat humana. Potser ací, per a explicitar més allò que vull dir, seria convenient de recordar l'exemple de Quine. Aquest lògic fa l'encaixament de quadres següent:



tot fent-hi aquest comentari: En l'estudi del món real hi ha ciències que són més a prop d'aquesta realitat, com indica la figura. Així, quan hom fa un descobriment important cal canviar en primer lloc la capa exterior per a poder encabir aquest nou resultat. Però pot ocórrer que el descobriment sigui molt profund i calgui modificar les bases de la segona capa, i així successivament fins arribar a la capa més interior. Creure que les idees bàsiques de la lògica i de la matemàtica són perdurables és un error, i els descobriments de Gödel s'insereixen en aquest ordre d'idees.

Tornant a les idees de Cantor, dèiem que aquest sembla creure que la idea de conjunt és intrínseca a la mateixa natura humana i que tots els tipus de problemes que plantegen s'han de poder resoldre *per tal com tot el que hi havia o hi podia haver* darrera la idea de conjunt s'havia recollit en els dos axiomes que hem esmentat. Però ben aviat el mateix quefer matemàtic demostrà que hi havia moltes coses amagades sota el concepte de conjunt i que caldria donar una definició més precisa d'aquest concepte. Aquestes dificultats que sorgeixen són, essencialment, de dues menes:

a) Hi ha dificultats que porten a una contradicció com, per exemple, la Peano-Russell que apareix en considerar el conjunt de tots els conjunts que no es pertanyen a ells mateixos; és a dir, surt d'aplicar l'axioma de comprensió a la propietat $P(v) = \neg(x \in x)$ i, si R és el conjunt considerat, $\forall x\ (x \in R \Leftrightarrow \neg(x \in x))$.

b) L'altra mena de dificultats són d'un caire ben diferent. Quan la teoria dels conjunts estigué desenvolupada, es plantejaren problemes que no havien estat previstos en els axiomes i que semblaven, segons com fossin considerats molt trivials o molt complicats. Trivials en tant que semblava que la mateixa intuïció era capaç d'admetre'ls. No trivials en tant que se'n deduïen propietats que no eren gens trivials.

Zermelo fou un dels primers a adonar-se de la necessitat de donar definicions precises de conjunt. Però semblava que donar una definició de conjunt sempre havia de portar a cercles viciosos, ja que la mateixa idea de conjunt és tan primitiva que no permet d'ésser reduïda a d'altres. Però Zermelo se'n surt de l'única manera que hom pot fer-ho en Matemàtiques: no definint conjunt en termes de coses més simples, sinó donant unes propietats que han de satisfer els objectes de la teoria dels conjunts.

Els axiomes donats per Zermelo són:
0) conjunt buit; 1) extensionalitat; 2) del parell: existeix un conjunt que té per elements dos de donats; 3) de la unió; 4) d'infinitud; 5) de les parts. (E. Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Math. Annalen, 65 (1908) pp. 261-281 i über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik. Turd. Math. 14 (1929) pp. 339-344).

A aquests axiomes, Fraenkel n'afegeix dos més: 6) de substitució (Ersetzungsaxion); 7) de reguralitat (Fundierungsaxion) (Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlhere, Math. Ann. 86 (1822) pp. 230-237) i finalment Zermelo adopta el sistema d'axiomes format pels 8 axiomes anteriors (Grenzzahlen und Mergerbereiche. Fund. Math. 16 (1930), pp. 29-47). Aquest sistema d'axiones es coneix per ZF.

Aquests axiomes semblaven satisfactoris per a fer gran part de les matemàtiques usuals, però ben aviat surt una propietat necessària per a la consideració de problemes analítics que no havia estat tinguda en compte: l'*axioma d'elecció* (A. E.), que ve a dir que, donat un conjunt no buit de conjunts no buits, podem fabricar un conjunt amb un element i un sol de cada conjunt de l'inicial.

Això semblava intuïtivament clar, però les conseqüències que es dedueixen d'aquesta propietat ja no són tan clares: per exemple, que tot conjunt pot ésser ben ordenat. Durant un cert temps el món de la teoria dels conjunts queda encisat per aquest problema, i hom intenta de demostrar-lo a partir dels altres axiomes. Els intents fallen. Només, i com a exemple, per tal de poder justificar això que volem dir, vegem a la llum del que ja sabem quines conseqüències té aquest axioma. Considerem el concepte de continuïtat en un punt:

- en el sentit de Cauchy: $\forall \varepsilon \; \exists \delta \; \forall x \; |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$
- en el sentit de Heine-Borel: $(x_n) \rightarrow x_o \Rightarrow (f(x_n)) \rightarrow f(x_o)$.

És ben conegut que: C. C.$\Rightarrow$H. B. però, per contra, per a demostrar que H. B.$\Rightarrow$C. C. necessitem l'axioma de l'elecció.

Intuïtivament semblava clar que les dues nocions de continuïtat puntual havien d'ésser equivalents, o millor encara, que el tipus d'anàlisi que hom volia fer hauria de tenir com a teorema: C. C.$\Leftrightarrow$H. B.

Un altre tipus de problema, ja més sofisticat que l'A. E., és el de la *hipòtesi del continu* (H. C.) que ve a dir que entre A i P(A), si A és infinit, no hi ha cardinals diferents, i que es pot enunciar d'una forma més complicada fent servir la teoria dels àlefs. Així com l'A. E. semblava intuïtivament clar, la H. C. no ho sembla pas tant i la seva utilització resulta més dubtosa en Anàlisi. Per tal de veure una conseqüència típica de la H. C. ferem servir un exemple de Sierspinski (*Rendiconti del Mat. Pal.*, vol. 1 (1952), pp. 6-10): «The euclidean space of 3 dimensions is a union of sets E_1,E_2,E_3 such that whenever A is a line parallel to the i th axis of coordination ($i=1,2,3$) then $A \cap E_i$ is finite».

Com veiem en aquests exemples, la importància de l'A. E. no és pas lleugera i tampoc no ho és la de la H. C. Ara bé, el primer que s'adona del problema que això involucra estructuralment és K. Gödel en *The Consistency of the Axion of Choice and the Generalized Continuum Hypotesis*, Proc. Nort. Acad. 24 (1938) pp. 526-567, i en *Consistency-Proof for the Generalized Continuum Hypotesis*, Proc. Noat. Acad. Sci., 25 (1939) pp. 220-225.[1]

K. Gödel s'adona que és molt dificultós de provar A. E. + H. C. a partir dels altres axiomes, i estableix que almenys no són contradictoris amb els altres axiomes. El pas qualitatiu és important: Gödel construeix models de la teoria dels conjunts que satisfan alhora els 8 axiones + A. E. + H. C. Fent això, Gödel posa de manifest que el problema de A. E. + H. C. és semblant al de la geometria euclidiana: aquests axiomes no estan pas intuïtivament lligats al món real, ans depenen del model que volem construir del món real. Gödel, amb aquesta visió preclara de la idea de donar un model de la teoria dels conjunts, obre les bases dels resultats que vindran al llarg d'un seguit d'anys.

[NADAL BATLE]

3. TEOREMA DE COMPLETESA DE GÖDEL DEL CÀLCUL DE PREDICATS DE PRIMER ORDRE

Aquest teorema fa referència a una qüestió molt important en qualsevol teoria com és la relació entre la seva sintaxi i la seva semàntica.

Començaré parlant d'aquests dos termes. En matemàtiques fem frases com

$(\forall x)\ (\exists y)\ (x+y=0)$ i de vegades ens preguntem si són certes o falses. La primera resposta és: «Oh!, depèn... si interpretem les variables x, y com a nombres naturals, la relació + com la suma de naturals i 0 com el zero, aleshores aquest enunciat no és pas cert. Per contra, si interpretem sobre els números enters, resulta que és certa». És a dir que la veritat o falsedat és relativa a la interpretació. Aquest és el *criteri semàntic de veritat.*

Un altre criteri per a saber si aquest enunciat és cert o fals és veure si es pot demostrar a partir d'uns enunciats fixats d'antuvi, i que en direm axiomes, mitjançant unes regles de deducció. En aquest cas la veritat és relativa a l'elecció dels axiomes i de les regles de deducció. Aquest és el *criteri sintàctic de veritat.*

Si som suficientment «llestos» per a escollir com a axiomes uns enunciats que siguin semànticament certs i unes regles de deducció que transformin enunciats semànticament certs en enunciats semànticament certs, aleshores resultarà automàticament que tota fórmula sintàcticament certa serà semànticament certa. El problema que es planteja és el de trobar uns axiomes i unes regles tals que *tot enunciat que sigui semànticament cert sigui sintàcticament cert.*

L'objectiu de lligar completament la semàntica i la sintaxi és un objectiu molt ambiciós i, en general, no és pas assolit totalment. Per posar un exemple una mica fora de la matemàtica, podem pensar en la lingüística matemàtica, on els enunciats certs són les frases «amb sentit» i l'objectiu de la sintaxi és de trobar axiomes —esquemes d'axiomes— i unes regles de transformació de forma que tota frase es pugui «generar» (deduir) sintàcticament a partir dels axiomes. Això ramparia amb les qüestions de gramàtica generativa, en general no resoltes.

En el capítol 4 us explicaran un cas on es demostra que el problema no es pot resoldre, i jo us explicaré un cas que té solució. És el que fa *referència als predicats de primer ordre.*

Gödel demostrà que, per a tot $A \subseteq P(V,R)$ i per a tot $p \in P(V,R)$,

$$A \models p \text{ si, i només si, } A \vdash p,$$

i quan dic «demostrà» vull dir que ho féu *matemàticament.*

Per a demostrar matemàticament cal precisar el llenguatge. Comencem per precisar què vol dir que p és un predicat construït sobre el conjunt V de variables, V infinit numerable, i les relacions $R = U\{R_1 R_2, \dots\}$ (relacions de tots els ordres). El conjunt de predicats sobre V i R amb les connectives monàries i binària

$$\neg,\ (\forall x)_{x \in V}\ ; \rightarrow,$$

és l'àlgebra lliure engendrada pel conjunt de fórmules del tipus $r_n(x_1,\ldots,x_n)$, $r_n \in R_n$ i $x_j \in V$, i per les operacions $\neg, \rightarrow, (\forall x)_{x \in V}$.

Suposem que entre els predicats de primer ordre definim la deducció semàntica així: $A \models p$ — el conjunt A de predicats implica el predicat p si, i només si, per a tota interpretació que faci certs tots els predicats de A aleshores fa p cert.

Cal precisar què s'entén per una interpretació de l'àlgebra de predicats. Si U és un conjunt i $F: R \rightarrow R_U$ que conservi l'arietat (U,F) se'n diu un model. Aleshores tota aplicació $\varphi: V \rightarrow U$ juntament amb F, determina una interpretació de p de la següent manera (cal fer-ho recursivament d'acord amb la construcció de les fórmules):

- si el predicat és atòmic $r_n(x_1,\ldots,x_n)$, direm que és cert si, i només si, la relacio $F(r_n)$ $(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n))$ es compleix; és a dir: $(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)) \in F(r_n)$;
- si el predicat és negació d'un altre, aleshores és cert si, i només si, l'altre és fals;
- si el predicat és $p = q \rightarrow r$, aleshores és fals si, i només si, q és cert i r és fals;
- si el predicat és dels tipus $p = (\forall x)q$, aleshores p és cert si, i només si, en interpretar les variables de p diferents de x per a φ i a x assignar-li tots els valors possibles en U, aleshores q sempre és certa.

Quant a la sintaxi cal precisar que els axiomes són els següents:
1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$; 2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$; 3)$\neg\neg p \rightarrow p$; 4) $((\forall x)(p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow ((\forall x)q))$ si x no és lliure en p; 5) $(\forall x p \rightarrow p$; i com a regles de deducció el *modus ponens* i la generalització.

Cal precisar formalment què vol dir una demostració:
$A \vdash p$ vol dir que existeix una successió finita de predicats

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \qquad \text{on } p_n = p$$

tal que cada p_i o bé és un axioma o bé pertany al conjunt d'hipòtesis A, o bé s'obté per *modus ponens* de dos anteriors (és a dir: $j,k < i$ tals que $p_j = p_k \rightarrow p_i$) o bé s'obté per generalització d'una altra fórmula p_j, $j < i$ i p_j té una demostració on les hipòtesis de $\mathscr{A} \cup A$ que es fan servir són tals que x no és lliure (x és qualsevol).

És amb aquest sentit dels símbols $\vdash$ i $\models$ que Gödel l'any 1930 enucià i demostrà que

$$A \models p \quad \text{si, i només si, } A \vdash p.$$

[VENTURA VERDÚ]

4. Teorema d'incompletesa de Gödel

i. *De l'escola finitista de Hilbert*

La qüestió fonamental es planteja quan hom vol donar una resposta concreta a qüestions que componen el metallenguatge. Disposem d'un llenguatge concret: el llenguatge matemàtic, lògic, usual, escaquístic, etc. Aquest llenguatge pot ésser «usat» per l'individu; així quan un matemàtic fa matemàtica, el lògic, lògica, una persona escriu, un jugador juga als escacs, etc. En tots aquests casos el llenguatge s'ha usat en el sentit que hom no té cap necessitat de *sortir fora* del propi llenguatge.

Però hom pot referir-se al llenguatge des d'una instància diferent del propi llenguatge (un llenguatge mai no s'ha de referir a ell mateix). Així un matemàtic pot dir: «$x^2+y^2=z^2$ és un cas particular de $x^n+y^n=z^n$» i un lógic pot dir: «el càlcul de predicats de primer ordre és complet», i el qui escriu: «'abstracte' és abstracte» i l'escaquista: «rei i cavall contra rei sol són taules». Ara bé si ens fixem amb la darrera expressió, hom pot demostrar-la per mitja de raonaments finitistes dins el joc mateix dels escacs.

Bé doncs, la línia de Hilbert consisteix a donar resposta finitista a qüestions com: «el càlcul de predicats de primer ordre és complet»; «el càlcul de proposicions és complet»; «l'aritmètica és consistent», utilitzant els resursos del propi llenguatge.

Aclarim una mica més aquestes qüestions:

Un llenguatge *finitista* estarà constituït per uns signes i per unes *regles de formació* que, aplicades un *nombre* finit de vegades, generin *totes* les paraules o fórmules. Un conjunt distingit de fórmules constituirà els *axiomes*. S'admetran unes certes *regles de deducció*: això són regles que permeten d'associar una fórmula a certes col·leccions *finites* de fórmules. Els *teoremes* de la teoria s'obtindran a partir dels axiomes aplicant les regles de deducció un nombre *finit* de vegades.

L'exemple concret més simple és el càlcul de proposicions.

Els signes són: lògics: $\neg, \rightarrow$; auxiliars:),(; variables: A_i, $i \in N$.

Les regles són: 1) Tota variables és una fórmula; 2) si $\mathscr{A}$ és una fórmula, $(\neg\mathscr{A})$ és una fórmula; 3) si $\mathscr{A}$ i β són fórmules, $(\mathscr{A}\rightarrow\beta)$ és una formula.

Els axiomes son: a) $\mathscr{A}\rightarrow(\beta\rightarrow\mathscr{A})$; b) $(\neg\beta\rightarrow\neg\mathscr{A})\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\beta)$; c) $(\mathscr{A}\rightarrow(\beta\rightarrow\mathscr{C}))\rightarrow((\mathscr{A}\rightarrow\beta)\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{C}))$, on $\mathscr{A}$, β i $\mathscr{C}$ són fórmules.

Les regles de deducció són: de $\mathscr{A}$ i de $\mathscr{A}\rightarrow\beta$ se'n segueix β (M.P.).

Els teoremes són les fórmules $\mathscr{A}$ tals que, existeix una successió *finita* de fórmules

$$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_n$$

tals que i) $\mathcal{A}_n$ és $\mathcal{A}$; ii) per cada i ($1 \leq i \leq n$) o bé $\mathcal{A}_i$ és un axioma o bé $\mathcal{A}_i$ s'obté aplicant M.P. a $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{A}_k$ (on $j,k<i$).

Hom pot demostrar el següent teorema:

$$\neg \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \beta)$$

on $\mathcal{A}$ i β són fórmules qualssevols.

Si diem que un càlcul de proposicions és *consistent* si, i només si, no existeix cap fórmula $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}$ i $\neg \mathcal{A}$ siguin teoremes, resulta que per donar una resposta *dins* el càlcul a l'afirmació *sobre* el càlcul: «el càlcul de proposicions *és consistent*», cal veure que hi ha una fórmula almenys que *no és teorema*.

Per efectuar això, Hilbert recorregué al mètode de la *representació:* Si hom pot representar d'alguna manera el càlcul de proposicions de forma que

- la representació dels axiomes tingui una certa propietat i
- aquesta propietat sigui hereditària per les regles de deducció, aleshores tot teorema tindrà aquesta propietat.

És suficient doncs de demostrar que hi ha fórmules que es representen en objectes que no tenen la propietat enunciada i, per tant, hi ha fórmules que no són teoremes i, per tant, el càlcul de proposicions és consistent.

Com us ha dit Ventura Verdú, Gödel aportà quelcom en aquesta línia; aportà la idea d'adequació de la representació: resulta que aquesta representació és *adequada*; és a dir, tot objecte de l'univers de representació, amb la propietat dita, representa un teorema.

ii. *De la paradoxa de Richard*

La idea de la representació cal fer-la amb una gran atenció, de forma que hom no cometi una incorrecció que esdevingui *paradoxal.* Richard proposà d'escriure en català totes les propietats dels nombres naturals: «ésser primer»; «ésser quadrat perfecte»; «ésser divisible per 3»,...

La col·lecció de totes les propietats dels nombres naturals expressables en català és numerable (i aquí cal fer un «crit d'alerta», ja que N té una col·lecció contínua de subconjunts i, per tant, hi ha subconjunts de N que «no poden ésser descrits» en català. Aquesta idea, en una certa forma, constitueix el nus del teorema de Gödel. Volem dir que el nus del teorema de Gödel consisteix en una idea d'aquest tipus. Després en parlarem.)

Richard proposa a continuació d'enumerar la col·lecció de frases anterior. Així

Símbol	Frase	... Referent (N)
1	«ésser primer»	
.	.	
.	.	
.	.	
n	«ésser quadrat perfecte»	
.	.	
.	.	
.	.	

Un nombre natural és *richardià* si, i només si, no verifica la propietat enunciada. Així, si a «ésser divisible per 3» li correspon el «5», el «5» és richardià. Aleshores «ésser richardià» és una propietat dels nombres naturals i, per tant, es troba en la llista anterior i té un nombre associat; diguem-li «m». Hom veu fàcilment que «m» és richardià si, i només si, «m» és no richardià.

L'error l'hem comès en confondre els *símbols* associats amb les frases —que es refereixen a nombres naturals— amb nombres naturals. Quan diem que «ésser richardià» es refereix a nombres naturals diem quelcom que no és pas cert; «ésser richardià» es refereix als signes utilitzats per a representar frases i, per tant, la mateixa definició d'«ésser richardià» no és pas possible. (Suposem que els símbols fossin signes arbitraris: lletres.)

iii. *Del teorema de Gödel*

Quan hom interpreta una fòrmula del tipus $(\forall x)p(x)$ en el conjunt N dels nombres naturals, si $(\forall x)p(x)$ és vàlida en N cal que, per a cada $n \in N$, $p(n)$ sigui certa en N. Ara bé, aquest concepte $p(n)$ l'introduïm *en el mateix llenguatge formal* (ja que $n \in N$, però no pertany pas al llenguatge formal).

En el llenguatge $\mathscr{L}$ disposem dels *numerals:* $n^* = s^{n)}sO$; és el nom en $\mathscr{L}$ de $n \in N$.

Ara suposem que, per a cada $n \in N$, $p(n^*)$ és un teorema de la teoria aritmètica de primer ordre; aleshores entenem —ja que això és el que passa en N— que no pot pas ésser que $p(n^*)$ sigui teorema per tot $n \in N$ i, alhora, $\neg(\forall x)p(x)$ sigui teorema. Això constitueix la *w-consistència.*

Hom pot demostrar que la *w*-consistència implica la consistència.

Què significa que $\mathscr{L}$ és *finitament representable*?

Significa que *certs subconjunt* Q de N^m, per a cada $m \in N$, es corresponen amb fórmules de $\mathscr{L}$, $W_Q(x_1,\ldots,x_m)$ amb m veritables lliures tals que

$W_Q(n^*_1,\ldots,n^*_m)$ és teorema si $(n_1,\ldots,n_m)\in Q$.
$\neg W_Q(n^*_1,\ldots,n^*_m)$ és teorema si $(n_1,\ldots,n_m)\notin Q$

Ara bé, és clar que de fórmules de $\mathscr{L}$ amb n variables lliures només en disposem d'una quantitat numerable si bé de subconjunts de N^m en disposem d'una quantitat contínua.

Per tant hi haurà un cert subconjunt $Q\subset N$ tal que hom pot descruire'l en $\mathscr{L}$ per mitjà d'una fórmula U, però aquesta fórmula U és de tal natural que existeix un n^*_o de $\mathscr{L}$ associat a un $n_o\in Q$ de forma que ni $U(n^*_o)$ ni $\neg U(n^*_o)$ no són teoremes de l'aritmètica de primer ordre. (Vegeu per a més detalls, *Cerebros, màquinas y matemàticas*, de M. A. Arbib, Alianza Universidad, núm. 158); allò que és sorprenent és que $U(n^*_o)$ interpreta en N ens diu, precisament, que $n_o\in Q$, la qual afirmació és *semànticament* certa i, per contra, no és demostrable.

No hi ha doncs *completesa* en cap dels sentits esmentats: ni en el sentit descrit en l'exposició de Ventura Verdú, ni en el sentit donat per mi mateix.

També és clar que afegint $U(n^*_o)$ o $\neg U(n^*_o)$ als axiomes de la teoria aritmètica no tanquem pas la qüestió, ja que obtindríem una nova extensió de l'aritmètica *w*-consistent i finitament representable que no pot pas ésser completa.

La idea de Gödel, anomenada *gödelització* d'un llenguatge, és grollerament la següent:

En el llenguatge tenim uns certs signes i establim una aplicació g del conjunt de signes en N:

$$\begin{array}{rcl} & g & \\ \neg & \longrightarrow & 2 \\ \rightarrow & \longrightarrow & 3 \\ ) & \longrightarrow & 4 \\ (& \longrightarrow & 5 \\ \forall & \longrightarrow & 6 \\ o & \longrightarrow & 7 \\ + & \longrightarrow & 8 \\ . & \longrightarrow & 9 \\ \leq & \longrightarrow & 10 \\ x_n & \longrightarrow & 11+n \end{array}$$

i a cada fórmula li associa un nombre:

$$g((\forall x_5)(\neg(x_5\leq x_4))=2^5.3^6.5^{16}.7^5.11^2.13^5.17^{16}.19^{10}.23^{15}.29^4.31^4$$

i a cada demostració li associa també un nombre

$$p_1,\ldots,p_k\rightarrow g(p_1,\ldots,p_k)=2^{p1}.3^{p2}\ldots n_k^{pk}$$

i així obté una aplicació *injectiva*

$$g: P = P(V,R) \rightarrow N$$

que admet una *inversa:* $f: g(P) \rightarrow P$.

Aleshores, sigui

$R = \{(x_1,x_2) : x_2$ és el nombre de Gödel d'una demostrarció en la teoria de $f(x_1)\} \subseteq N^2$.

Fixem-nos que això comportar que x_1 sigui nombre de Gödel d'una fórmula, ja que cal que $f(x_1) \in P$ estigui definit. Aquest conjunt R admet una relació binària en $\mathscr{L}$: $W(x_1,x_2)$ i, a partir d'ella, definim Q i $U(x_1)$:

$$Q = \{x_1 \in N: \text{ existeix un } x_2 \text{ tal que } (x_1,x_2) \in R\}$$
$$U(x_1) = \exists\, x_2 W(x_1,x_2).$$

Doncs bé, Q i $U(x_1)$ no es corresponen pas.

[JOSEP PLA I CARRERA]

1. Per a una relació més àmplia de la bibliografia de K. Gödel hom pot recórrer al «Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques» núm. 1, febrer 1979.